Kako se lotiš: UGT

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 30. maj 2023

1 Kvocientne strukture

Osnovni pojem tega razdelka je definicija topologije na kvocinentnem prostoru $X/_\sim$. Želimo, da je kvocientna projekcija $q : X \to X/_\sim$ zvezna, in da je topologija na $X/_\sim$ čim bolj podobna tisti na X. V ta namen definiramo

$$\begin{aligned} V^{\text{odp}} \subseteq X/_\sim &\Leftrightarrow q^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X \\ Z^{\text{zap}} \subseteq X/_\sim &\Leftrightarrow q^*(Z)^{\text{zap}} \subseteq X. \end{aligned}$$

V splošnem q ni niti odprta niti zaprta, v posebnem primeru pa je; q je odprta natanko tedaj, ko je nasičenje vsake odprte množice odprto. Podobno velja tudi za zaprtost in zaprte množice.

Pojem kvocientne preslikave lahko še posplošimo;

Definicija. Preslikava $f : X \to Y$ je KVOCIENTNA, če je surjektivna in če velja

$$\forall V \subseteq Y \,.\, V^{\text{odp}} \subseteq Y \Leftrightarrow f^*(V)^{\text{odp}} \subseteq X.$$

Podoben pogoj bi lahko postavili tudi za zaprte podmnožice Y. Implikacija v desno v zgornji definiciji pove, da je f zvezna; implikacija v levo pa, da je KVOCIENTNA V OŽJEM SMISLU.

Pomen te razširitve je v naslednjem izreku:

Izrek. *Naj bo X prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Naj bo $f : X \to Y$ kvocientna preslikava. Če f naredi iste identifikacije kot $\sim$, potem je inducirana preslikava $\overline{f} : X/_\sim \to Y$ homeomorfizem.*

Izrek običajno uporabimo postopoma. Prvi korak je, da si narišemo diagram situacije.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X/_\sim \arrow[r, dotted, "\approx"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dokazati želimo, da sta prostora $X/_\sim$ in Y homeomorfna. V ta namen si izmislimo predpis za f in začnemo dokazovati, da lahko uporabimo izrek. Prvo moramo preveriti, da je f sploh dobro definirana; to je implikacija v desno v zapisu $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Pogosto lahko obe implikaciji dokažemo hkrati. Implikacija v levo tu pove, da je f injektivna med ekvivalenčnimi razredi (oz. da je inducirana preslikava injektivna). Če dokažemo zveznost f, dobimo zveznost $\overline{f}$. Podobno nam surjektivnost f poda surjektivnost $\overline{f}$. Za konec nam ostane še kvocientnost v ožjem smislu.

Tega si ne želimo preverjati po definiciji, zato imamo na razpolago več kriterijev. Predpostavimo, da je $f : X \to Y$ zvezna surjekcija;

- Če je f še odprta ali zaprta, je kvocientna.
- Če je X kompakt in Y T_2, je f zaprta, torej kvocientna.
- Če obstaja (zvezna) i, da je $f \circ i = \mathrm{id}$, je i vložitev in f kvocientna v ožjem smislu.
- Če je $(A_i)_i$ lokalno končno kompaktno pokritje X, $(f_*(A_i))_i$ lokalno končno zaprto pokritje Y, ter če sta oba prostora T_2, je inducirana preslikava zaprta; če že vemo, da je zvezna bijekcija, sledi, da je homeomorfizem.
- Če je q surjektivna na kompaktnem podprostoru X, je $X/_\sim$ kompakt, zato je inducirana preslikava zaprta; če že vemo, da je zvezna bijekcija, sledi, da je homeomorfizem.

1.1 Operacije s kvocienti

Kompozitum dveh kvocientnih preslikav je znova kvocientna, velja pa tudi drug sklep; če je $g \circ f$ kvocientna in sta f, g zvezni, je g kvocientna.

Najpomembnejši pojem v tem razdelku je deljivost topoloških lastnosti. Lastnost je deljiva, če se prenese na vsak kvocient prostora, oziroma če se ohranja pri kvocientnih preslikavah. Deljivost je prikazana v naslednji tabeli;

Deljive lastnosti	Nedeljive lastnosti
povezanost (s potmi)	T_i
kompaktnost	1-števnost
separabilnost	2-števnost
lokalna povezanost (s potmi)	metrizabilnost
diskretnost	lokalna kompaktnost
trivialnost	popolna nepovezanost

Ker ločljivostne lastnosti niso deljive, imamo lahko hude težave s predstavo kvocientnih prostorov. Za lastnost T_1 imamo na voljo karakterizacijo; $X/_\sim$ je T_1 natanko tedaj, ko so ekvivalenčni razredi zaprti v X.

1.2 Topološke grupe

Naj bo G grupa. Kot množico jo lahko opremimo s topologijo. Če sta operaciji množenja in invertiranja zvezni, taki strukturi pravimo TOPOLOŠKA GRUPA. Analogno lahko definiramo tudi ostale algebraične strukture; posebej pomembni so topološki obsegi $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Enostavna posledica definicije je, da so translacije $g \mapsto ag$ za $a \in G$ homeomorfizmi.

Ker imajo algebraično strukturo, so topološke grupe zelo lepi prostori; veljajo namreč naslednje trditve:

- Množica $A \subseteq G$ je okolica točke $a \in G$ natanko tedaj, ko je $ba^{-1}A$ okolica točke $b \in G$.
- Če je $H \leq G$ podgrupa in okolica enote, je priprta v G.
- Če je C komponenta za povezanost, ki vsebuje enoto, je C zaprta edinka.
- Lastnosti $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ so ekvivalentne.

Pri topologiji so grupe pomembne predvsem zaradi delovanja.

Definicija. Naj bo X topološki prostor in G topološka grupa. DELOVANJE G na X je zvezna preslikava $\phi : G \times X \to X$, da velja

- $\phi(1, x) = x$,
- $\phi(a, \phi(b, x)) = \phi(ab, x)$.

Tudi pri delovanjih velja, da so translacije $x \mapsto a \cdot x$ homeomorfizmi.

Delovanje grupe nam porodi ekvivalenčno relacijo

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists a \in G \,.\, a \cdot x = y.$$

Ekvivalenčne razrede (to so množice $G \cdot x$ za $x \in X$) imenujemo ORBITE. Kvocientni prostor označimo z $X/_G$. Če je $G \subseteq X$, se ta oznaka križa s prejšnjo oznako; pri kvocientu pa ne dobimo enakega rezultata!

Če topološka grupa deluje na prostor X, je kvocientna projekcija po delovanju odprta.

1.3 Zlepki

Zlepek je kvocient direktne vsote dveh prostorov po predelu, definiranim s funkcijo f. Naj bosta X, Y prostora, $A \subseteq X$ poljubna podmnožica ter $f : A \to Y$ zvezna preslikava. Potem je zlepek

$$X \cup_f Y = X \amalg Y/_\sim$$

za ekvivalenčno relacijo $x \in A \sim f(x) \in Y$. V praksi to pomeni, da točke iz množice A nalepimo na njihove slike v prostoru Y.

Zlepki so lepi primeri kvocientov, ker v posebnih primerih ohranijo veliko ljubih lastnosti.

- Če sta X in Y normalna ter $A^{\text{zap}} \subseteq X$, je zlepek $X \cup_f Y$ normalen.
- Če je A zaprta, in f zaprta vložitev, se ohranjata tudi 2-števnost in T_2.

1.4 Znani kvocienti

Poznamo nekaj standardnih konstrukcij.

- Naj bo X topološki prostor. Stožec nad X je $CX = X \times [0,1]/X \times \{1\}$.
- Naj bo X topološki prostor. Suspenzija nad X je $\Sigma X = X \times [-1,1]/(X \times \{1\}, X \times \{-1\})$.

Velja $CS^{n-1} \approx B^n$ in $\Sigma S^{n-1} \approx S^n$.

2 Projektivni prostori

Definicija. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. n-RAZSEŽNI PROJEKTIVNI PROSTOR NAD $\mathbb{F}$ je kvocientni prostor

$$\mathbb{F}P^n = \mathbb{F}^{n+1} \backslash \{0\} \, / \, \mathbb{F}^*.$$

Običajno gledamo prostore $\mathbb{R}P^n$, ki si jih lahko predstavljamo kot običajen $\mathbb{R}^n$, ki smo mu dodali točke v neskončnosti. V teh točkah naj bi se sekale vzporedne premice. Velja $\mathbb{R}P^n \approx S^n/S^0 = S^n/(x \sim -x) \approx B^n/(x \sim -x, x \in S^{n-1})$.

Iz teorije vemo, da je $\mathbb{F}P^n$ homogen prostor (torej za vsak par točk obstaja homeomorfizem, ki eno točko slika v drugo). Dodatne lastnosti so naslednje:

- (lokalna) povezanost s potmi,
- separabilnost,
- 2-števnost,
- normalnost,
- kompaktnost,
- lokalna kompaktnost.

Izkaže se, da so projektivni prostori strašno trapasti za dokazovanje česarkoli. Da jih vsaj malo ukrotimo, lahko za $\mathbb{R}P^n$ uvedemo HOMOGENE KOORDINATE;

$$[x_1, \ldots, x_{n+1}] = [(x_1, \ldots, x_{n+1})].$$

Množice $U_k = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}] \mid x_k \neq 0\}$ tvorijo odprto pokritje za $\mathbb{R}P^n$. Vsak od njih je homeomorfen $\mathbb{R}^n$.

3 Retrakti, homotopije

Definicija. Množica $A \subseteq X$ je RETRAKT prostora X, če obstaja zvezna preslikava $r : X \to A$, da je $r(a) = a$ za $a \in A$.

Retrakcije ohranjajo povezanost (s potmi) in kompaktnost.

Retrakt Hausdorffovega prostora je vedno zaprt.

Definicija. Prostor Y je ABSOLUTNI EKSTENZOR, če za vsak normalen prostor X, vsako podmnožico $A^{\text{zap}} \subseteq X$ ter vsako preslikavo $f : A \to Y$ obstaja razširitev te preslikave na X.

Tietzejev izrek nam pove, da so intervali na realni osi absolutni ekstenzorji. Produkt dveh absolutnih ekstenzorjev je absolutni ekstenzor. Retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor. Poleg tega je unija dveh absolutnih ekstenzorjev, ki se sekata v eni točki, absolutni ekstenzor.

Če absolutni ekstenzor zaprto vložimo v poljuben normalen prostor, lahko ta prostor rektraktiramo do vloženega ekstenzorja (absolutni ekstenzor je absolutni retrakt). To trditev lahko uporabimo za dokaz, da nekaj ni absolutni ekstenzor; npr. S^1 ni absolutni ekstenzor, ker ni retrakt ravnine.

Definicija. Naj bosta X, Y topološka prostora, ter $f, g : X \to Y$ zvezni preslikavi. HOMOTOPIJA med f in g, če obstaja, je preslikava

$$H : X \times I \to Y,$$

za katero velja $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$. Homotopnost funkcij označimo z $f \simeq g$.

Vsaka retrakcija je homotopna identiteti.

Definicija. Prostor X je KONTRAKTIBILEN, če je identiteta homotopna kaki konstantni preslikavi $X \to X$.

Vsi konveksni prostori so kontraktibilni. Primer nekontraktibilnega prostora je S^1.

Če je prostor kontraktibilen, je povezan s potmi.

4 Topologija evklidskih prostorov

Pri topologiji evklidskih prostorov se zanašamo na nekaj znanih izrekov.

Izrek (Brouwer)**.** *Vsaka zvezna preslikava $f : B^n \to B^n$ ima negibno točko.*

Definicija. Prostor X ima LASTNOST NEGIBNE TOČKE, če ima vsaka zvezna preslikava $f : X \to X$ negibno točko.

To je topološka lastnost in se ohranja pri homeomorfizmih. Poleg tega se ohranja pri retrakcijah; retrakt prostora z LNT ima LNT.

Izrek. *Prostor S^{n-1} ni retrakt B^n.*

Izrek. *Prostor S^{n-1} ni kontraktibilen.*

Trditev. *Za vsak homeomorfizem $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ obstaja homeomorfizem $F : B^n \to B^n$, da je $F(x) = f(x)$ za $x \in S^{n-1}$.*

Definicija. Naj bo X povezan topološki prostor in $A \subseteq X$. Prostor A deli X, če je $X \backslash A$ nepovezan.

Izrek (Jordan)**.** *Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ topološka krožnica. Komplement $\mathbb{R}^2 \backslash S$ ima natanko dve komponenti za povezanost. Ena je omejena, druga je neomejena. S je meja obeh komponent.*

Ta izrek lahko tudi posplošimo na več dimenzij;

Izrek (Jordan-Brouwer)**.** *Naj bo $n \geq 2$ in $S \subseteq \mathbb{R}^n$ topološka $(n-1)$-sfera. Komplement $\mathbb{R}^n \backslash S$ ima natanko 2 komponenti, ena je omejena in ena neomejena. Obe sta odprti v $\mathbb{R}^n$ in povezani s potmi. Meja obeh komponent je S.*

Analogno velja tudi, če zamenjamo $\mathbb{R}^n$ z S^n; edina sprememba je, da sta obe komponenti omejeni.

Izrek (Schoenflies)**.** *Naj bo $S \subseteq \mathbb{R}^2$ homeomorfna S^1 in V omejena komponenta $\mathbb{R}^2 \backslash S$. Potem je $\overline{V} \approx B^2$.*

Analogna trditev za višje dimenzije ne velja.

5 Invarianca odprtih množic

Izrek (Izrek o odprti preslikavi)**.** *Naj bo $V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $f : V \to \mathbb{R}^n$ zvezna in injektivna. Potem je f odprta.*

Iz izreka sledi, da je f odprta vložitev, torej je $f_+(V)^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Pomembno je, da je ambientni prostor $\mathbb{R}^n$, sicer izrek ne velja.

Posledica. *Naj bo $V^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$ in $W \subseteq \mathbb{R}^n$ homeomorfna V. Potem je $W^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{R}^n$.*

6 Mnogoterosti

Definicija. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. Topološka mnogoterost dimenzije n je 2-števen T_2 prostor M, v katerem ima vsaka točka x okolico $V_x^{\text{odp}} \subseteq M$, homeomorfno bodisi $\mathbb{R}^n$ bodisi $\mathbb{R}^n_+$.

Množico vseh točk, ki imajo okolico, homeomorfno $\mathbb{R}^n$, imenujemo notranjost mnogoterosti, ostale točke pa rob mnogoterosti. Ta pojma pa ne sovpadata z notranjostjo in mejo v splošnem topološkem smislu.

Kompaktni mnogoterosti brez roba pravimo SKLENJENA MNOGOTEROST.

Iz znanih mnogoterosti lahko dobimo nove: Odprta podmnožica mnogoterosti je vedno mnogoterost. Vsaka povezana komponenta mnogoterosti je mnogoterost. Disjunktna unija števno mnogo mnogoterosti je mnogoterost. Če ima mnogoterost neprazen rob, je ta rob mnogoterost z eno nižjo dimenzijo, ki nima roba. Produkt n-mnt in m-mnt je $(n+m)$-mnt. Za določitev roba produkta uporabimo formulo za odvajanje produkta:

$$\partial(N \times M) = \partial N \times M \cup N \times \partial M.$$

Če želimo pokazati, da je nek prostor mnogoterost, je včasih lažje pokazati, da je homeomorfen eni od zgornjih konstrukcij. Uporabimo lahko tudi znanje analize; vsaka gladka mnogoterost je topološka mnogoterost.

Ena od glavnih operacij za ustvarjanje novih mnogoterosti je povezana vsota; iz dveh mnogoterosti izrežemo disk in rezultata zlepimo skupaj. Dobimo novo mnogoterost z robom

$$\partial(X \# Y) = \partial X \cup \partial Y.$$

Mnogoterosti imajo vedno naslednje lastnosti:

- Lokalna povezanost (s potmi)
- Lokalna kompaktnost
- Metrizabilnost

Izrek (Izrek o odprti preslikavi za mnogoterosti)**.** *Naj bosta N, M n-mnt, $V^{\text{odp}} \subseteq intM$ ter $f : V \to N$ zvezna injekcija. Potem je f odprta in $f_*(V) \subseteq intN$.*

Za dokazovanje, da nekaj ni mnogoterost, si lahko pomagamo z zgornjim izrekom. Če najdemo zvezno injekcijo iz neke znane mnogoterosti v naš prostor, in odprto množico v notranjosti te znane mnogoterosti (ali pa če le-ta nima roba), mora biti njena slika odprta podmnožica v našem prostoru; pogosto lahko preslikavo zapišemo tako, da ta slika ne bo odprta. Pri tem moramo paziti, da je izbrana znana mnogoterost enake dimenzije, kakršne bi bil naš prostor, če bi bil mnogoterost.

Druga možnost je, da pogledamo kakšne razpadne točke našega prostora. Če dokazujemo, da prostor ni 1-mnt, je dovolj, da najdemo točko, brez katere bi prostor (in posledično okolice te točke) razpadel na tri ali več komponent; evklidske okolice te točke bi morale namreč razpasti na dve komponenti. Če dokazujemo, da prostor ni 2-mnt, pa je že razpadna točka sama po sebi dovolj, ker je $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ povezan.

7 Ploskve

Definicija. PLOSKEV je povezana 2-mnt.

Poznamo vse sklenjene ploskve. To so

- S^2,
- nT,
- mP.

Za določitev, v katero skupino te ploskve spadajo, lahko pogledamo dve lastnosti; orientabilnost in Eulerjevo karakteristiko

$$\chi(X) = V - E + F.$$

Glede na to, kako je ploskev podana, ti lastnosti določimo drugače.

Če je ploskev podana z besedo (torej kot mnogokotnik, ki mu zlepimo nekatere stranice), orientabilnost določimo tako, da pogledamo "potence" dane besede. Če se kakšna črka v besedi pojavi več kot enkrat z enako potenco, je ploskev neorientabilna; sicer je orientabilna. Eulerjevo karakteristiko tedaj določimo tako, da preštejemo oglišča, stranice in ploskve *na zlepljeni sliki.* Lahko se zgodi, da se vsa oglišča v originalu zlepijo v enega, ali v več oglišč.

Če je ploskev podana s sliko, lahko orientabilnost določimo z barvanjem. Če lahko ploskev pobarvamo z dvema barvama, je orientabilna. Za dokaz neorientabilnosti moramo najti Möbiusov trak v dani ploskvi. Pri določitvi Eulerjeve karakteristike si pomagamo z računanjem. Prvo v naši ploskvi najdemo disk (B^2), vložen tako, da so razen diska v naši ploskvi samo trakovi. Začnemo s $\chi = 1$, za vsak trak pa odštejemo 1 od χ.

Ploskve S^2 in nT so orientabilne, ploskve mP pa niso. Velja $\chi(S^2) = 2$, $\chi(nT) = 2 - 2n$ ter $\chi(mP) = 2 - m$.

Preverjanje orientabilnosti z izbiro normale deluje samo v primeru, da je kodimenzija ena (torej ploskev, vložena v $\mathbb{R}^3$).

Nesklenjene ploskve imajo vedno rob, sestavljen iz končnega števila krožnic S^1. Da določimo ploskev z robom, prvo preštejemo robne komponente, in nato določimo orientabilnost in Eulerjevo karakteristiko kot zgoraj. Da določimo, iz katere sklenjene ploskve moramo izrezati diske, da dobimo to nesklenjeno, prištejemo število robnih komponent k izračunanem χ.

Veljata naslednji enakosti za χ;

- $\chi(X\#Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2$,
- $\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y)$ za disjunktne unije.