# Kako se lotiš: ANA2b

Patrik Žnidaršič

Prevedeno 11. junij 2023

## 1 Fourierove vrste

Osnovna vrsta naloge je razvoj neke funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ v Fourierovo vrsto

$$FV(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kjer se koeficiente izračuna po formulah

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Če razvijaš na intervalu $[-\alpha, \alpha]$ namesto $[-\pi, \pi]$, namesto tega integriraš

$$a_n = \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\cos(\frac{\pi}{\alpha}nx)dx, \qquad b_n = \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\sin(\frac{\pi}{\alpha}nx)dx.$$

Razvijanje v vrsto poteka čisto po postopku, lahko pa si pomagaš z raznimi triki. Lahko npr. izračunaš integral

$$\int_{\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx,$$

ter nato vzameš njegovo realno in imaginarno komponento.

Če je funkcija soda oz. liha, si lahko prihraniš nekaj računanja, saj bodo bodisi koeficienti pred sinusi bodisi koeficienti pred kosinusi enaki 0. Pogosto se pojavi tudi naloga, kjer imaš dano funkcijo $[0, \pi] \to \mathbb{R}$, in jo moraš razviti v kosinusno ali sinusno vrsto (morda piše tudi soda ali liha razširitev). To je enak primer, kot če bi bila funkcija definirana na $[-\pi, \pi]$ ter soda oz. liha.

Vredno je omeniti, da razvoj v Fourierovo vrsto ne garantira enakosti povsod. Zunaj intervala $(-\pi, \pi)$ bo dobljena vrsta periodična, na robu intervala pa bo vrednost enaka povprečju vrednosti obeh vej. Bolj specifično; za odsekoma odvedljivo $2\pi$-periodično funkcijo $f$ velja

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Druga pogosta naloga je, da izračunaš neko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pri čemer je običajno podana funkcija, katere Fourierov razvoj lahko pretvoriš v to vrsto, če ga evaluiraš v neki pametno izbrani točki.

Včasih pride prav Parsevalova enakost;

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

## 2 Vektorska analiza

Tri pomembne operacije v vektorski analizi so

- GRADIENT: $\vec{\nabla}.u = (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u)$.
- DIVERGENCA: $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = (X_x, Y_y, Z_z)$.
- ROTOR: $\vec{\nabla} \times \vec{R} = (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y)$.

Operator nabla ($\vec{\nabla}$) si lahko mislimo kot vektor $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, vendar ga ne smemo obravnavati kot vektor; formula za dvojni vektorski produkt recimo ne velja za $\vec{\nabla}$.

Za smerni odvod funkcije velja $\partial_{\vec{s}} u = \vec{\nabla}.u \cdot \vec{s}$.

Zaporedje operacij, kakor je napisano spodaj, je posebno; če naredimo dva zaporedna koraka, vedno pridemo do rezultata 0.

$$S \xrightarrow{\text{grad}} V \xrightarrow{\text{rot}} V \xrightarrow{\text{div}} S$$

Divergenca rotorja je vedno 0, prav tako je rotor gradienta vedno 0. Divergenca gradienta pa ni nujno 0, temveč je nov operator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Glede teh stvari imamo nekaj novih pojmov:

- Polje $u$ je HARMONIČNO, če je $\Delta u = 0$.
- Polje $\vec{R}$ je POTENCIALNO, če je $\vec{R} = \vec{\nabla}.u$ za neko skalarno polje $u$. Različni potenciali se med seboj razlikujejo za funkcijo, konstantno na povezanih komponentah.
- Polje $\vec{R}$ ima VEKTORSKI POTENCIAL, če je $\vec{R} = \vec{\nabla} \times \vec{f}$ za neko vektorsko polje $\vec{f}$.
- Polje $\vec{R}$ je IROTACIONALNO, če je $\vec{\nabla} \times \vec{R} = 0$.
- Polje $\vec{R}$ je SOLENOIDALNO, če je $\vec{\nabla} \cdot \vec{R} = 0$.

Pogost tip naloge je, da dobiš predpis vektorskega polja $\vec{f} = (X, Y, Z)$, ter moraš dokazati, da je polje potencialno in poiskati njegov potencial. Naloge se lotiš tako, da predpostaviš obstoj potenciala $u$, ter zapišeš enačbe

$$\partial_x u = X \qquad \partial_y u = Y \qquad \partial_z u = Z.$$

Za enačbo, ki je najbolj preprosta, izračunaš določeni integral; recimo, da je to zadnja enačba. Potem je $u = \int Zdz + C_z(x,y)$, kjer je $C$ neka preslikava, odvisna od $x$ in $y$ ter neodvisna od $z$. Ta predpis odvajaš po $y$ (ali $x$), primerjaš s pripadajočo enačbo zgoraj in zapišeš $u = \cdots + C_{yz}(x)$, kjer je $C$ sedaj neka druga preslikava, odvisna le od $x$ (oz. $y$). Naposled to odvajaš še po zadnji spremenljivki, primerjaš z enačbo zgoraj in zapišeš rezultat.

Če so v taki nalogi parametri (*izračunaj* $a, b$, *da bo* $\vec{f}_{a,b}(x,y,z)$ *potencialno*), uporabiš dejstvo, da ima potencialno polje rotor vedno enak 0.

## 3 Krivuljni in ploskovni integrali

Osnovni način izračuna integrala skalarnega oz. vektorskega polja po krivulji ali ploskvi je, da krivuljo (ploskev) parametriziramo, ter uporabimo ustrezno formulo;

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma u ds &= \int_\alpha^\beta u(\vec{r}(t)) \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| dt \\
\int_{\vec{\Gamma}} \vec{R} d\vec{r} &= \int_\Gamma \vec{R} \cdot \vec{T} ds = \int_\alpha^\beta \vec{R}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \\
\iint_\Sigma u dS &= \iint_D u(\vec{r}(s,t)) \sqrt{EG - F^2}\, dsdt = \iint_D u(\vec{r}(s,t)) \left|\vec{r}_s \times \vec{r}_t\right| dsdt \\
\iint_{\vec{\Sigma}} \vec{R} d\vec{S} &= \iint_D \vec{R} \cdot \vec{N} dS = \iint_D \vec{R}(\vec{r}) \cdot (\vec{r}_s \times \vec{r}_t)\, dsdt
\end{aligned}
$$

Če je krivulja sklenjena, se integral zapiše s krogcem in se mu reče CIRKULACIJA.

Če imamo za integral podano diferencialno formo, jo prevedemo formuli:

$$
\begin{aligned}
\int_\Gamma X dx + Y dy + Z dz &= \int_K (X,Y,Z) d\vec{r} \\
\iint_\Sigma X dzdy + Y dxdz + Z dxdy &= \iint_\Sigma (X,Y,Z) d\vec{S}
\end{aligned}
$$

Pri drugem primeru moramo paziti; če je kakšen od diferencialov napisan v drugem vrstnem redu, ga obrnemo in dodamo njegovemu členu negativen predznak.

Ker v splošnem nočeš parametrizirati ničesar, si je za integriranje dobro zapomniti kakšen trik. Če imaš potencialno vektorsko polje, je integral tega polja po orientirani krivulji enak razliki med končno in začetno vrednostjo potenciala. Druga pomoč so integralski izreki

**Izrek.** *Gauss Naj bo $D$ omejena odprta množica v $\mathbb{R}^3$, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih ploskev,* orientiranih z zunanjo normalo $D$. *Potem je integral polja $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$*

$$
\oint\!\!\!\oint_{\partial D} \vec{R} d\vec{S} = \iiint_D \vec{\nabla} \cdot \vec{R} dV.
$$

**Izrek.** Greenova formula *Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ omejena odprta množica v ravnini, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih pozitivno glede na $D$. Za $X, Y \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ velja*

$$\oint_{\partial D} X dx + Y dy = \iint_D (Y_x - X_y) dx dy.$$

**Izrek.** Stokes *Naj bo $\Sigma$ omejena odsekoma gladka orientirana ploskev v $\mathbb{R}^3$, katere rob je sestavljen iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih skladno s $\Sigma$. Za $\vec{R} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Sigma})$ velja*

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{R} d\vec{r} = \iint_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{R} d\vec{S}.$$

Izreke lahko uporabljaš tudi v neočitno smer; če imaš za nalogo npr. izračun integrala po neki nesklenjeni ploskvi, lahko to ploskev poljubno skleneš z eno drugo, ter uporabiš Gaussov izrek. Tedaj moraš izračunati dva integrala, vendar je integral po izbrani ploskvi pogosto lažji kot integral po dani ploskvi.

Če ima funkcija na območju, ki ga določijo ti izreki, kakšno singularnost, se ji morda lahko izogneš tako, da jo "izrežeš"; dodaš sfero (krožnico) okoli singularnosti, ter to uporabiš kot rob območja.

### 3.1 Površine ploskev

Površina ploskve $\Sigma$, parametrizirane z $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je

$$\iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv$$

za $E = |\vec{r}_u|^2$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$ in $G = |\vec{r}_v|^2$.

Za izračun površine grafa $\mathcal{C}^1(D)$ funkcije $f$ obstaja lažja formula:

$$\iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy.$$

Če moraš izračunati površino torusa s polmeroma $0 < a < R$, lahko uporabiš

$$P = 2\pi a 2\pi R.$$

## 4 Kompleksna analiza

Funkcija $f$ je holomorfna na $D$, če je v kompleksnem smislu odvedljiva v vsaki točki $D$. Izkaže se, da so vse holomorfne funkcije razreda $\mathcal{C}^\infty$. Če je $f$ holomorfna na $\mathbb{C}$, ji pravimo cela funkcija.

**Izrek** (Cauchy-Riemannov sistem). *Naj bo $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ in $\alpha = a + ib \in D$.*

- *Če je $f$ v kompleksnem smislu odvedljiva v $\alpha$, sta $u$ in $v$ diferenciabilni in parcialno odvedljivi v točki $(a, b)$. Velja*

$$u_x = v_y, \qquad\qquad u_y = -v_x$$

  *v tej točki.*

- *Če sta $u, v$ diferenciabilni v $(a, b)$ in v tej točki veljata zgornji enakosti, je $f$ v $\alpha$ v kompleksnem smislu odvedljiva.*

Definiramo lahko $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ in $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$.

**Trditev.** *Če je $f$ diferenciabilna na $D$, je holomorfna na $D$ natanko tedaj, ko je*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

*To je natanko tedaj, ko je v vsaki točki $\alpha \in D$ diferencial $df_\alpha$ $\mathbb{C}$-linearen.*

Holomorfna funkcija je analitična; za vsak $a \in D$ obstaja okolica, na kateri vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

konvergira. Uporabimo lahko orodja analize 1; vse vrste elementarnih funkcij konvergirajo z enakim polmerom. V splošnem lahko izračunamo

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Vrsta konvergira k holomorfni funkciji na $K(a, R)$.

Pri razvoju vrste okoli $\alpha$, je včasih smiselno prvo narediti substitucijo $w = z - \alpha$. Uporabna je tudi formula za konvolucijo vrst;

$$\left(\sum_n a_n x^n\right)\left(\sum_m b_m x^m\right) = \sum_k \left(\sum_{m+n=k} a_n b_m\right) x^k.$$

Funkcijo

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \in \mathbb{C}(z)$$

razviješ tako, da pogledaš stopnjo pola v $\alpha$ (torej kratnost ničle $\alpha$ za $q$), in zapišeš

$$(c_{-N} z^{-N} + c_{-N+1} z^{-N+1} + \ldots) q(z) = p(z).$$

Z definicijo kompleksnega logaritma je problem, ker $e^z$ ni injektivna (vsako vrednost razen 0 doseže neskončno mnogokrat). Za logaritem si moramo izbrati nek poltrak od

0, na katerem ne bo definiran; običajno izberemo pozitivno ali negativno realno polos. Vedno velja

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w,$$

kjer je nabor vrednosti za $\arg w$ poljuben interval dolžine $2\pi$. Če logaritem izberemo tako, da ni definiran na negativni realni polosi, velja $\arg w \in (-\pi, \pi)$.

Pri obravnavi funkcij, ki vsebujejo $z^\alpha$, moramo biti previdni in upoštevati definicijo;

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

## 4.1 Kompleksni integral

Krivuljni integral zvezne funkcije $f : \gamma \to \mathbb{C}$ je definiran kot

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))dt$$

za $\mathcal{C}^1$ parametrizacijo $z(t)$. Če je $f = u + iv$, je to enako

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i \int_\gamma udy + vdx.$$

Zanimiv je integral $f(z) = \overline{z}$ po omejenem območju s kosoma gladkim robom; velja

$$\int_{\partial D} \overline{z}dz = 2iP(D),$$

kjer je $P(D)$ ploščina $D$.

Za funkcijo $F$, holomorfno na $D \supset \gamma$, velja

$$\int_\gamma F'(z)dz = F(\beta) - F(\alpha),$$

kjer sta $\alpha$ in $\beta$ začetna in končna točka $\gamma$.

**Izrek** (Greenova formula)**.** *Naj bo $D^{\mathrm{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih pozitivno glede na $D$. Naj bosta $f, g \in \mathcal{C}^1(D)$. Potem je*

$$\int_{\partial D} f(z)dz + g(z)d\overline{z} = 2i \iint_D (\partial_{\overline{z}} f - \partial_z g)(z)dxdy.$$

**Posledica.** *Za enake predpostavke in $f \in \mathcal{O}(D)$ velja*

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0.$$

**Izrek** (Cauchyjeva formula)**.** *Naj bo* $D^{\text{odp}} \subseteq \mathbb{C}$ *omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih krivulj, orientiranih pozitivno glede na* $D$*. Naj bo* $f \in \mathcal{O}(D)$ *in* $f \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$*. Naj bo* $\alpha \in D$*. Potem je*

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - \alpha} dz.$$

S kompleksnim integriranjem lahko izračunamo tudi nekaj realnih integralov; če imamo funkcijo $f(x) = F(\sin x, \cos x, x)$, zamenjamo pojavitve kotnih funkcij z $e^{iz}$, pojavitve $x$ pa z $z$; tako dobimo funkcijo $g(z)$. Sedaj si izberemo tako domeno, da bo $g$ na njej holomorfna, in da bo po vlečenju limit del robu prekril želeno realno območje. Pogosto izberemo polkrog v zgornji polravnini, ki mu po potrebi izrežemo manjši krog okoli točke 0. Zgornji rob tedaj ponavadi konvergira k 0 za $R \to \infty$, kar pokažemo z oceno absolutne vrednosti. Pri tem sta uporabni dejstvi

$$e^{iRe^{i\phi}} = e^{iR\cos\phi} e^{-R\sin\phi}, \qquad\qquad |a + b| \geq ||a| - |b||\,.$$

## 4.2 Izolirane singularne točke

Funkcija, ki je holomorfna na $D \backslash \{\alpha\}$, ima v $\alpha$ izolirano singularno točko. Velja ena od naslednjih možnosti:

- Točka $\alpha$ je odpravljiva singularnost; $f$ lahko razširimo do holomorfne funkcije na $D$. To se zgodi natanko takrat, ko obstaja prebodena okolica točke $\alpha$, na kateri je $f$ omejena.
- Točka $\alpha$ je pol stopnje $n$. To se zgodi natanko tedaj, ko je

  $$\lim_{z \to \alpha} |f(z)| = \infty.$$

  V takem primeru obstaja okolica $U$ točke $\alpha$, da na $U \backslash \{\alpha\}$ velja

  $$f(z) = \frac{g(z)}{(z - \alpha)^n}$$

  za neko $g \in \mathcal{O}(U)$.
- Točka $\alpha$ je bistvena singularnost. Obnašanje najbolje opiše veliki Picardov izrek.

**Izrek** (Veliki Picardov izrek)**.** *Naj bo* $f$ *holomorfna na prebodeni okolici točke* $\alpha$*. Funkcija* $f$ *ima v* $\alpha$ *bistveno singularnost natanko tedaj, ko* $f$ *zavzame vse vrednosti v* $\mathbb{C}$*, razen morda ene, neskončno mnogokrat v vsaki prebodeni okolici točke* $\alpha$*.*

Za določitev tipa singularnosti si pogledamo Laurantovo vrsto v okolici $\alpha$. Če ima vrsta vse negativne indekse ničelne, je $\alpha$ odpravljiva singularnost. Če ima le končno mnogo negativnih indeksov, je $\alpha$ pol. Sicer je bistvena singularnost.

**Trditev.** *Vsaka cela holomorfna funkcija, ki ne zavzame dveh vrednosti, je konstantna.*

### 4.3 Holomorfne funkcije

**Izrek** (Louville)**.** *Naj bo $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ cela funkcija. Denimo, da obstajata $c > 0$ in $n \in \mathbb{N}$, da za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja $|f(z)| \leq c(1 + |z|^n)$. Potem je $f$ polinom stopnje največ $n$.*

**Izrek** (Princip maksima)**.** *Naj bo $D \subseteq \mathbb{C}$ omejena odprta množica. Naj bo $f$ holomorfna na $D$ in zvezna na $\overline{D}$. Tedaj je $\max_{\overline{D}} |f| = \max_{\partial D} |f|$.*

**Izrek** (Princip identičnosti)**.** *Naj bo $D$ območje in $A \subseteq D$ podmnožica s stekališčem v $D$. Naj bosta $f, g \in \mathcal{O}(D)$, in naj velja $f = g$ na $A$. Tedaj $f = g$ na $D$.*

Princip identičnosti lahko uporabljamo pri določitvi holomorfnih funkcij. Če imamo neke podatke o obliki funkcije, in lahko izrazimo

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

potem lahko uporabimo izrek za $A = \mathbb{R}$ in $g = f(x, 0)$; zapišemo predpis za funkcijo z $y = 0$, ter zamenjamo vse $x$ z $z$.

Če je $f = u + iv$ holomorfna, velja $\Delta u = \Delta v = 0$.

Naj bo $A \subseteq D^{\text{odp}}$ diskretna množica. Funkcija $f : D \backslash A \to \mathbb{C}$ je meromorfna, če je holomorfna, in če ima v vsaki točki $A$ pol. Vsaka meromorfna funkcija je oblike $\frac{f}{g}$, kjer sta $f, g$ holomorfni na $D$.

Naj bo $f$ holomorfna na prebodeni okolici točke $\alpha$. Residuum $f$ v $\alpha$ je člen $a_{-1}$ v razvoju v Laurantovo vrsto.

**Izrek** (Izrek o residuumih)**.** *Naj bo $D$ omejena odprta množica z odsekoma gladkim robom, sestavljenim iz končnega števila odsekoma gladkih sklenjenih krivulj, orientiranih pozitivno glede na $D$. Naj bodo $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in D$ in $f \in \mathcal{O}(D \backslash \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D} \backslash \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\})$. Potem je*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{i=1}^{N} Res(f, \alpha_i).$$

Residuum lahko izračunamo tudi na lažji način; če je $\alpha$ pol stopnje $N$ za $f$, je

$$\text{Res}(f, \alpha) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to \alpha} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}((z - \alpha)^N f(z)).$$

Za $N = 1$ je ta formula še posebej uporabna;

$$\text{Res}(f, \alpha) = \lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) f(z).$$

Pri višjih polih in bistvenih singularnostih se običajno bolj splača pogledati Laurantovo vrsto.

**Izrek** (Princip argumenta)**.** *Naj bo $D \subseteq \Omega$ omejena odprta množica, $\partial D$ kot v Cauchyjevem izreku in $f$ meromorfna na $\Omega$. Denimo, da $f$ nima ničel na $\partial D$. Potem je*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N_f - P_f,$$

*kjer sta $N_f$ in $P_f$ število ničel in polov $f$ na $D$, šteto s kratnostjo.*

**Izrek** (Rouche)**.** *Naj bo $D \subseteq \Omega$ omejena odprta množica in $\partial D$ kot v Cauchyjevem izreku. Naj bosta $F, f \in \mathcal{O}(\Omega)$ in naj velja $|g(z)| < |f(z)|$ na $\partial D$. Tedaj imata $F$ in $F + f$ na $D$ enako ničel, šteto s kratnostjo.*

Izrek uporabiš, če moraš določiti število ničel polinoma na nekem krogu. Pogledaš, kateri člen je na robu kroga največji, in oceniš, da je strogo večji od vsote ostalih. Potem ti ta določa, koliko ničel je v tem krogu. Kolobar obravnavaš kot dva kroga.

**Izrek** (Odprta preslikava)**.** *Naj bo $D$ območje v $\mathbb{C}$ in $f : D \to \mathbb{C}$ nekonstantna holomorfna funkcija. Potem je $f$ odprta preslikava.*

**Izrek** (Obstoj logaritma)**.** *Naj bo $D$ zvezdasto območje in $f \in \mathcal{O}(D)$ brez ničel. Potem obstaja $g$, da je $f = e^g$.*

## 4.4 Möbiusove in konformne preslikave

Avtomorfizmi $\mathbb{CP}^1$ so oblike

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

kjer velja $ad - bc = 1$. Te preslikave slikajo množico premic in krožnic v $C$ v množico premic in krožnic v $\mathbb{C}$; ne slika pa se premica nujno v premico ali krožnica nujno v krožnico. Premice v $\mathbb{C}$ lahko obravnavamo kot krožnice v $\mathbb{CP}^1$ skozi točko $\infty$.

Preslikava je konformna na $D$, če v vsaki točki $\alpha \in D$ ohranja kote in orientacije kotov; formalno, če obstaja $\phi \in [0, 2\pi]$, da za vsak $\theta \in [0, 2\pi]$ velja

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha)}{|f(\alpha + re^{i\theta}) - f(\alpha)|} = e^{i\phi}e^{i\theta}.$$

Holomorfna funkcija, katere odvod je različen od 0 v vseh točkah $D$ je konformna na $D$. Obratno velja, če že vemo, da je $f$ diferenciabilna.

Če za odprti množici $D, \Omega \subseteq \mathbb{C}$ obstaja biholomorfna preslikava $f : D \to \Omega$ (holomorfna bijekcija s holomorfnim inverzom), pravimo, da sta množici konformno ekvivalentni. Riemannov upodobitveni izrek pove, da je vsako enostavno povezano območje, različno od $\mathbb{C}$, konformno ekvivalentno enotskem disku. Včasih naloga zahteva, da to pokažeš. Običajno je to najlažje narediti tako, da prvo najdeš ekvivalenco v zgornjo polravnino, na njej pa uporabiš

$$f_0(z) = \frac{iz + 1}{iz - 1}.$$

Da pričaraš preslikavo v željen (ali manj neželen) prostor, si izbereš tri točke, in kam jih slikaš. Rešiš sistem enačb za $a, b, c, d$ za preslikavo v $\operatorname{Aut} \mathbb{CP}^1$, in pogledaš, kam se tvoj prostor slika. Pomagaš si z dejstvom, da te preslikave ohranjajo kote.

Uporabiš lahko tudi preslikave tipa

$$z \mapsto z^{p/q},$$

pri čemer moraš biti pozoren, da izrežeš nek del ravnine za logaritem. Trak $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (0, \pi i)\}$ lahko slikaš v zgornjo polravnino z $f(z) = e^z$.

Če prostor že od začetka ni bil homeomorfen disku, ni upanja, da mu bo konformno ekvivalenten.